

## Comparison of goodness of fit in lactation curve modeling in Holstein dairy cows

M. Tajik-khari<sup>1</sup>, M. Gholizadeh<sup>1\*</sup>, Gh. Peykani Machiani<sup>2</sup>

1. Department of Animal Science and Fisheries, Sari Agricultural Sciences and Natural Resources University, Sari, Iran  
2. Department of Economic Science, Faculty of Agriculture, University of Tehran, Karaj, Iran

(Received: 15-04-2025 – Revised: 24-07-2025 – Accepted: 26-07-2025 – Available online: 03-09-2025)

### Abstract

**Introduction:** Lactation curves are essential tools for understanding milk production patterns in dairy cattle, providing critical insights for herd management and genetic improvement. Modeling these curves accurately is vital to predict yield, optimize feeding strategies, and enhance overall productivity. Among the various approaches, non-linear models such as Wood, Wilmink, Dhanoa, Cappio-Borlino, and Cobby & Le Du have been widely used to describe the lactation kinetics in Holstein cattle. However, comparative evaluations of these models' performance under similar conditions remain limited. This study aimed to assess and compare the goodness-of-fit of these five established models to identify the most suitable for characterizing lactation curves in Holstein cows, ensuring more precise and reliable production forecasting. Additionally, the possibility of utilizing the Dynamic Ordinary Least Squares (DOLS) method instead of the traditional nonlinear least squares (LS) approach for the best-fitted model was investigated to explore potential improvements in estimation accuracy.

**Materials and methods:** This study utilized milk production records from a dairy farm in Tehran Province, Iran, under the supervision of the National Animal Breeding Center. The dataset included 1050 test-day records from the first three lactation periods (1<sup>st</sup> to 3<sup>rd</sup>), spanning 305 days in milk (DIM). Only cows with a minimum of 10 valid test-day records and lactations exceeding 200 days were considered. Lactation curves were fitted using five non-linear models, Wood, Wilmink, Dhanoa, Cappio-Borlino, and Cobby & Le Du, implemented in R software (packages *nlme* and *minpack.lm*). Model performance was assessed using goodness-of-fit criteria, including the coefficient of determination ( $R^2$ ), root mean square error (RMSE), and Akaike Information Criterion (AIC). Upon identifying the best-performing model, the DOLS method was applied to evaluate its potential for improving parameter estimation accuracy. This analysis was conducted using records from the first three lactations of eight Holstein dairy cows.

**Results and discussion:** Comparative analysis of the five non-linear models revealed the Wood model as the most statistically suitable for characterizing Holstein lactation curves. While effective, the Wood model demonstrated limitations under traditional LS estimation, particularly in accurately predicting peak yield magnitude and timing. These shortcomings stemmed from the LS method's sensitivity to initial parameter values and its inability to properly synchronize estimated events with observed farm data. Implementation of the DOLS method substantially enhanced model performance. The DOLS-adapted Wood model showed improved goodness-of-fit metrics and, crucially, provided more biologically accurate estimates of key lactation events, including initial yield, peak timing, and peak magnitude. These estimates closely matched actual farm records, demonstrating superior predictive capability compared to the LS approach. The study confirmed established biological patterns: third-lactation cows exhibited higher initial yields ( $\alpha$  parameter) and greater persistence (lower  $c$  parameter values) compared to first-lactation animals. These findings align with known metabolic adaptations in mature cows and previous reports of lactation curve dynamics. Visual and statistical comparisons revealed

\* Corresponding author: m.gholizadeh@sanru.ac.ir



distinct advantages of the DOLS approach. While both methods achieved reasonable goodness-of-fit, the DOLS-generated curve showed better alignment with critical lactation points and lower standard errors, particularly for peak-related parameters. This temporal calibration is essential for practical applications, as even models with high  $R^2$  values may yield misleading recommendations if event timing is inaccurate. The results substantiate theoretical advantages of DOLS in production function estimation, demonstrating its capacity to generate properly calibrated, differentiable concave functions that faithfully represent biological reality while maintaining statistical rigor.

**Conclusions:** This study demonstrates that the DOLS method offers substantial improvements over traditional nonlinear LS for modeling Holstein lactation curves using Wood's equation. The DOLS approach effectively addresses critical limitations of conventional nonlinear estimation, particularly its dependence on manual parameter initialization and its tendency for temporal miscalibration. By providing parameter estimates that align more closely with biological reality, DOLS enables superior prediction of key lactation traits, including peak yield and persistence, crucial factors for genetic selection and herd management decisions. The methodological advantages of DOLS extend beyond statistical performance to practical implementation; its ability to estimate marginal productivity within the actual lactation timeline while preserving biological plausibility makes it especially valuable for dairy management applications. These findings suggest that adopting DOLS in breeding programs and farm management systems could enhance both the accuracy and economic outcomes of production decisions. While this research presents a novel application of DOLS to lactation modeling, certain limitations merit consideration. The relatively small sample size, the absence of formal cointegration testing, and unexamined econometric assumptions, such as stationarity and residual independence, highlight the need for validation with larger and more diverse datasets. Future studies should examine DOLS performance across different breeds, management systems, and lactation stages while incorporating appropriate econometric validation procedures. Nevertheless, this work establishes DOLS as a promising alternative to conventional nonlinear approaches, offering both theoretical rigor and practical utility for lactation curve analysis in dairy science.

**Keywords:** Milk yield, Dairy cattle, Lactation curve, Non-linear regression models

**Ethics statement:** This article does not contain any studies with human participants or animals performed by any of the authors.

**Data availability statement:** The data that support the findings of this study are available on request from the corresponding author.

**Conflicts of interest:** The authors declare no conflicts of interest.

**Funding:** This research was financially supported by the Sari Agricultural Sciences and Natural Resources University under grant number 02-1404-02.

**Acknowledgment:** The authors thank the Sari Agricultural Sciences and Natural Resources University for supporting this project.

#### How to cite this article:

Tajik-khari, M., Gholizadeh, M., & Peykani Machiani, Gh. (2025). Comparison of goodness of fit in lactation curve modeling in Holstein dairy cows. *Animal Production Research*, 14(4), 81-94. doi: 10.22124/ar.2025.30723.1898



## مقایسه نکوئی برازش در مدل سازی منحنی شیردهی در گاوهای شیری هلشتاین

محمد تاجیک خواری<sup>۱</sup>، محسن قلیزاده<sup>۱\*</sup>، غلامرضا پیکانی ماچیان<sup>۲</sup>

۱- گروه علوم دامی، دانشکده علوم دامی و شیلات، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری

۲- گروه اقتصاد کشاورزی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۲۶ - تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۵/۰۲ - تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۴ - تاریخ انتشار برخط: ۱۴۰۴/۰۶/۱۲

### چکیده

این مطالعه به ارزیابی پنج مدل غیرخطی رایج (وود، وایلمینک، دهنووا، کاپیو-برلینو و کوبی-لیدو) برای برازش منحنی شیردهی در گاوهای هلشتاین پرداخت. داده‌های مورد استفاده شامل ۱۰۵۰ رکورد روزانه تولید شیر طی ۳۰۵ روز از دوره‌های اول تا سوم شیردهی گاوهای یک واحد دامداری در استان تهران، زیر نظارت مرکز اصلاح نژاد دام کشور، بود که تنها گاوهای دارای حداقل ۱۰ رکورد معتبر و دوره شیردهی بیش از ۲۰۰ روز وارد تحلیل شدند. مدل‌های منحنی در نرم‌افزار R و با استفاده از معیارهای برازش  $R^2$ ، RMSE و AIC ارزیابی شدند. نتایج نشان داد مدل وود، بهترین برازش را دارد. سپس، کارایی روش حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS) در تخمین فراسنجه‌های مدل وود بررسی شد که نسبت به روش‌های حداقل مربعات غیرخطی متداول، بهبود قابل توجهی در برآورد دقیق فراسنجه‌های کلیدی از جمله تولید اولیه شیر، زمان و مقدار اوج تولید و نرخ کاهش پس از اوج نشان داد و انطباق بهتری با رکوردهای روزآزمون گله ایجاد کرد. همچنین، الگوهای زیستی شناخته‌شده‌ای تأیید شد؛ به‌طوری که گاوهای دوره سوم شیردهی در مقایسه با گاوهای دوره اول، تولید اولیه بالاتر و تداوم شیردهی بهتری داشتند. با وجود نتایج امیدوارکننده، محدودیت‌هایی مانند حجم نمونه نسبتاً کوچک، استفاده از داده‌های یک گله و عدم انجام آزمون هم‌انباشتی، لزوم اعتبارسنجی نتایج در جمعیت‌ها و شرایط مدیریتی مختلف و با نمونه‌های بزرگ‌تر را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: تولید شیر، گاو شیری، مدل‌های رگرسیون غیرخطی، منحنی شیردهی

\* نویسنده مسئول: m.gholizadeh@sanru.ac.ir

## مقدمه

نتوانستند برازش دقیقی در ۳۰ روز ابتدایی شیردهی ارائه دهند (Lotfi et al., 2014) و اگرچه مدل علی-شفر به‌عنوان بهترین مدل معرفی شد (Mehrabarn et al., 2009)، اما به دلیل همبستگی بالای فراسنجه‌ها، این مدل در تجزیه و تحلیل‌های ژنتیکی محدودیت دارد (Macciotta et al., 2005). بنابراین، با وجود قابلیت‌های مناسب روش LS در برآورد مدل‌های خطی، این روش نمی‌تواند به‌طور دقیق تولید اولیه و اوج تولید مدل‌های غیرخطی را تخمین بزند. در همین راستا، مطالعه‌ای نشان داد روش حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS) قانون بازده نزولی را بهتر توضیح داده و فراسنجه‌های منحنی شیردهی را با دقت بالاتری برآورد می‌کند (Tajik khari et al., 2024). سایر پژوهش‌ها نیز بر توانایی DOLS در تخمین دقیق ضرایب رگرسیون تأکید داشته‌اند (Tawhidi Mehr, 2021). روش DOLS قادر است منحنی شیردهی را با حداکثر  $R^2$  و حداقل میانگین مربعات خطا برازش کرده و علاوه بر دقت در تخمین نقطه اوج تولید و مقدار اولیه، بهترین خط رگرسیونی را ارائه کند. هدف این مطالعه، ارزیابی پنج مدل غیرخطی رایج (وود، ویلمینک، دهنووا، کاپیو-برلینو و کوبی-لیدو) در برازش منحنی شیردهی گاوهای هلشتاین و بررسی کارایی روش DOLS در بهبود برازش بهترین مدل توصیف‌کننده منحنی تولید بود.

## مواد و روش‌ها

جمع‌آوری اطلاعات: در این مطالعه، از ۱۰۵۰ رکورد تولید شیر روزآزمون متعلق به یک مزرعه گاو شیری در استان تهران استفاده شد. رکوردهای شیردهی از سال ۱۳۹۰ در مرکز اصلاح نژاد گاو شیری، جمع‌آوری شده و مورد استفاده قرار گرفتند. حداقل و حداکثر تعداد روزهای شیردهی از ۵ تا ۳۰۵ روز بوده و با استفاده از نرم افزار Excel نسخه ۲۰۰۷، اطلاعات ویرایش شد. فاصله سنی برای زایش‌های اول تا سوم به ترتیب ۱۸ الی ۳۰، ۳۰ تا ۵۰ و ۵۰ تا ۷۰ ماهگی در نظر گرفته شد و در پایان صرفاً حیواناتی که دارای ۱۰ رکورد روزآزمون با بیش از ۲۰۰ روز شیردهی داشتند، انتخاب و در روند تجزیه و تحلیل آماری، قرار گرفتند (Elahi Torshizi et al., 2011). جدول توصیفی رکوردهای روزآزمون تولید شیر در جدول ۱ ارائه شده است. در این تحقیق، برای برازش منحنی تولید شیر، از دو بسته nlme و minpack.lm (Pinheiro et al., 2016)

منحنی شیردهی، تغییرات تولید شیر در واحد زمان را به‌صورت نموداری بیان می‌کند و بررسی آن برای پیش‌بینی میزان تولید روزانه، هفتگی یا ماهیانه با کمترین خطا در شرایط محیطی مختلف اهمیت زیادی دارد (Farhangfar, 2015). مدل‌های ریاضی منحنی شیردهی نقش مهمی در برنامه‌های اصلاح نژادی، مدیریت تغذیه و تصمیم‌گیری‌های مدیریتی برای حذف یا نگهداری دام‌ها و بهینه‌سازی سیستم‌های تولید شیر در گله‌ها ایفا می‌کنند (Ghavi Hossein-Zadeh, 2014). منحنی شیردهی در گاوهای شیری شامل دو مرحله افزایشی و کاهشی است که معمولاً شیب مرحله افزایشی بیشتر از شیب مرحله کاهشی بوده و محاسبه سرعت افزایش اولیه، ارتفاع نمودار در اوج شیردهی و شیب کاهش پس از اوج برای برآورد کل تولید شیر کاربرد دارد (Ghavi Hossein-Zadeh, 2017). کاربرد مدل‌های غیرخطی برای توصیف منحنی رشد و تولید در گونه‌های مختلف با موفقیت گزارش شده است (Ghavi Hossein-Zadeh, 2015, 2016; Zakizadeh et al., 2020; Shahroodi et al., 2021). از آنجا که توابع مورد استفاده برای برازش منحنی شیردهی اغلب غیرخطی هستند، تخمین فراسنجه‌های این مدل‌ها با استفاده از روش‌های تکراری صورت می‌گیرد (Hasanpur et al., 2012). روش آماری پرکاربرد در این زمینه، حداقل مربعات غیرخطی (LS) است که با کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا و حداکثرسازی  $R^2$  تصحیح شده ( $R^2_{adj}$ )، بهترین خط رگرسیونی را از داده‌ها عبور می‌دهد (Mahaboob et al., 2018). با این حال، LS ممکن است در تخمین مقادیر تولید اولیه و اوج تولید، خطا داشته و این مقادیر را کمتر یا بیشتر از مقدار واقعی برآورد کند (Grossman & Koops, 1988; Fathi et al., 2008).

مطالعات مختلفی در ایران به بررسی مدل‌های ریاضی برازش منحنی شیردهی گاوهای هلشتاین پرداخته‌اند و نتایج متناقضی گزارش شده است. به‌عنوان مثال، Arainfar et al. (2018)، تابع روک را به‌عنوان بهترین مدل معرفی کردند، هرچند این مدل در تخمین مقدار اولیه تولید، مقادیر بالاتری نسبت به واقعیت نشان داد. همچنین، تخمین بالاتر توابع ویلمینک و چندجمله‌ای معکوس پیش از دوره اوج گزارش شده است (Duret et al., 2003). مطالعه‌ای دیگر نشان داد توابع سینوسی، وود و دایجکسترا

جدول ۱- جدول توصیفی رکوردهای روزآزمون تولید شیر در سه دوره مختلف شیردهی

Table 1. Descriptive table of daily milk production test records in three different lactation periods

Month	Lactation											
	1				2				3			
	Max	Min	SD	Mean	Max	Min	SD	Mean	Max	Min	SD	Mean
1	58.5	37.7	7.94	42	65.4	35.8	12.03	40.91	52.8	11.3	15	40
2	67.2	42.5	7.59	58.27	69.4	43	8.47	52.15	56.2	33.2	7.73	43.17
3	67	42	6.85	54.5	72	44.7	7.93	50.81	63.7	36.6	7.56	45.22
4	64	33.5	9	51	64.5	29.3	10	48	50.7	26.8	6.58	40
5	59	41	5.64	49.14	68.2	37.5	8.87	46	58.2	33.3	7	39
6	60	36.5	6.21	46.11	62.9	40	8.26	43.15	40.4	31.7	8.32	37.22
7	56	37.5	6.44	42.5	59	39	6.63	42	57.8	29.4	8	36.55
8	57	30	8.5	41.22	62	29	8.68	39.55	58.7	28.4	8.66	35.9
9	50	27.14	8	38	515	30	7.04	37	49	23.6	7.8	33
10	48	25	7	36.5	45	26.6	7	35.4	51.3	30.4	8	31

استفاده از تخمین تابع تولید درجه سوم بر اساس قانون بازدهی نزولی برآورد می‌شوند (Tajik khari et al., 2024). قانون بازدهی نزولی بیان می‌کند که پس از رسیدن به یک نقطه بهینه، افزایش ورودی‌های تولید (مانند زمان شیردهی یا عوامل محیطی) با افزایش کمتری در خروجی (تولید شیر) همراه خواهد بود، تا جایی که ممکن است بازدهی به تدریج کاهش یابد. بنابراین، استفاده از تابع درجه سوم (یک تابع چندجمله‌ای درجه سه) این امکان را فراهم می‌کند که تغییرات غیرخطی تولید شیر در طول زمان شیردهی و کاهش تدریجی بازدهی را به خوبی مدل‌سازی کنیم. این تابع، قابلیت انعطاف‌پذیری بالایی در توصیف افزایش اولیه، رسیدن به اوج تولید و کاهش بعدی دارد که بازدهی نزولی را به صورت کمی و به شکل خمیده به تصویر می‌کشد. با استفاده از این روش، ضرایب مدل به گونه‌ای تخمین زده می‌شوند که هم با داده‌های موجود سازگار بوده و هم بتوانند روند واقعی تولید شیر در طول دوره شیردهی را به طور دقیق پیش‌بینی کنند. روش‌های رایج حداقل مربعات غیرخطی که فراسنجه‌های منحنی‌های ریاضی رشد را برآورد می‌نمایند، توانایی کالیبره‌سازی زمان را نخواهند داشت و به همین خاطر در گزارشات متعدد، مقدار اولیه تولید یا مقدار تولید شیر در زمان اوج، کم‌تر یا بیش‌تر برآورد می‌شود (Grossman & Koops., 1988; Duret et al., 2003; Arianfar et al., 2022). منظور از کالیبره‌سازی زمان این است که روش DOLS می‌تواند زمان رسیدن به مقدار اوج شیردهی را با آنچه که در واقعیت روی داده است مطابقت دهد و بنابراین، پیش‌بینی دقیقی را ارائه نماید. به عبارتی دیگر، این روش، یک تابع خوش فرم و مشتق‌پذیر از مدل‌های غیرخطی شیردهی به دست آورده و می‌تواند

نرم‌افزار R نسخه 4.3.2 استفاده شد. مدل‌های ریاضی به کار رفته در جدول ۲ نشان داده شده است. انتخاب مناسب این توابع برای برآورد صحیح فراسنجه‌های شیردهی، می‌تواند به ارزیابی دقیق‌تری از حیوانات کمک نماید (Takma & Akbas, 2007)، بنابراین، از میان مدل‌های مختلف، مدل‌هایی با کم‌ترین فراسنجه ریاضی و ساده‌تر بودن محاسبات آماری، پیشنهاد می‌شوند (Elahi Torshizi et al., 2011). کد نویسی و برآورد منحنی شیردهی: فراسنجه‌های منحنی‌های شیردهی در رویه حداقل مربعات غیرخطی با روش محاسبات عددی و تکرار با استفاده از الگوریتم گاوس-نیوتون برآورد شدند. این روش، ابتدا برای هر یک از فراسنجه‌های مدل‌های ریاضی، یک مقدار اولیه (پیش‌فرض) تعیین می‌کند و سپس، از راه تکرارهای متوالی، تخمین فراسنجه‌ها به گونه‌ای به روزرسانی می‌شود که مجموع مربعات خطا به حداقل برسد. پس از برآورد فراسنجه‌ها، می‌توان مقدار تولید شیر را در زمان‌های مختلف شیردهی پیش‌بینی کرد. فراسنجه‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، فراسنجه‌هایی با تفسیرهای زیستی و ریاضی هستند. فراسنجه  $a$ ، تولید اولیه شیر در شروع شیردهی (تولید نظری در  $t=0$ ) است؛  $b$  (فراسنجه شیب صعودی): سرعت افزایش تا اوج تولید را کنترل می‌کند و از نظر زیستی نشان می‌دهد که گاو با چه سرعتی به اوج شیردهی می‌رسد ( $b$  بالاتر = افزایش با شیب بیشتر)؛  $c$  (فراسنجه شیب نزولی): نرخ کاهش پس از اوج تولید را تعیین می‌کند و از نظر زیستی با تداوم شیردهی مرتبط است ( $c$  کمتر = کاهش کندتر، تداوم بهتر) (Farhangfar et al., 2023). از سوی دیگر، ضرایب رگرسیونی مدل حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS) برای تخمین فراسنجه‌های مدل‌های شیردهی با

و بهترین مدل‌ها، مدلی هستند که ضریب تعیین آن‌ها به عدد یک (۱) نزدیک‌تر است.

پس از شناسایی بهترین مدل توصیف‌کننده منحنی تولید شیر به وسیله مدل‌های غیرخطی رایج، برای بررسی کیفیت پیش‌بینی مدل DOLS و مقایسه آن با روش‌های معمول و رایج، از رکوردهای سه دوره اول شیردهی ۸ راس گاو شیری هلشتاین استفاده شد.

### نتایج و بحث

جدول ۳، مقادیر فراسنجه‌های مربوط به مدل‌های غیرخطی تولید شیر که با رویه LS برازش شده است را نشان می‌دهد. مقادیر  $R^2$  تمام مدل‌ها، بالا است و نشان‌دهنده برازش مناسب مدل‌ها روی رکوردهای تولید شیر طی زمان می‌باشد. میانگین مربعات خطا و معیار آکائیک مدل وود، از مدل‌های دیگر کم‌تر برآورد شده و به این خاطر، این مدل به دلیل واریانس خطای کم‌تر، برازش بهتری دارد و به‌عنوان بهترین مدل شناسایی شد. بسیاری از مزارع پرورش گاوهای شیری، نسبت به ثبت دقیق و صحیح اطلاعات مربوط به تولید شیر، اقدام نمی‌کنند و خطاهای اندازه‌گیری در بسیاری از مشاهدات به چشم می‌خورد. به این نکته باید توجه ویژه‌ای داشت که داشتن اطلاعات و رکوردهای دقیق، در محاسبه فراسنجه‌های منحنی‌های شیردهی و تصمیم‌گیری‌های مدیریتی، فوق‌العاده مهم و حائز اهمیت است. با این حال، ساختار تولید شیر در گاوهای شیری، باید از قانون بازدهی نزولی تبعیت نماید (Tajik khari et al., 2024)، ولی در بسیاری از موارد، این روند مشاهده نشده و در اطلاعات موجود، وجود رکوردهای نامتعارف در دوران پس از اوج تولید شیردهی، مشاهده می‌شود که این موضوع، نشان‌دهنده خطای اندازه‌گیری و عدم دقت در ثبت اطلاعات است. تابع گامای ناقص به‌طور گسترده‌ای برای برازش منحنی شیردهی گاوهای شیری، گوسفند و بز استفاده می‌شود. مدل‌های دهانوا و کاپیو-بورلینو نیز اشکال تغییر یافته مدل وود هستند (Fernández et al., 2002).

مطالعه دیگری روی توابع توصیف‌کننده شیر در گاوهای هلشتاین شکم اول، تابع وود را به‌عنوان بهترین مدل معرفی نمود (Elahi Torshiz et al., 2011) و علاوه بر آن، استفاده

زمان بی‌نهایت را به حداکثر زمان موجود در اطلاعات واقعی نزدیک نماید و بنابراین، مقدار تولید شیر در زمان اوج به‌طور دقیق محاسبه می‌شود. از آنجایی که پس از محاسبه مقدار بازدهی نهایی از روش DOLS، تمامی مقادیر زمان در محدوده اطلاعات واقعی قرار می‌گیرد، می‌توان بیان کرد که برای ارائه توصیه‌های اصلاح نژادی، می‌توان از این روش، استفاده گسترده‌ای داشت، زیرا استفاده از این روش، مقدار تولید شیر در زمان اولیه و زمان اوج تولید را به‌درستی و بر اساس آنچه که در رکوردهای روزآزمون است، برآورد نمود. با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی پویا، به راحتی حداکثر بازدهی نهایی (MP) به‌دست می‌آید و با استفاده از آن، می‌توان حداکثر بهره‌وری اقتصادی را جستجو کرد. معیارهای نکوئی برازش: این معیارها شامل موارد زیر هستند:

معیار آکائیک (AIC): این آماره برای تصحیح خطاهای مدل‌های برازش شده بر اساس تعداد فراسنجه‌های هر یک از آن‌ها استفاده می‌شود. هر اندازه، AIC کم‌تر باشد، مدل بهتر خواهد بود. ضریب آکائیک (Banga & Verm, 2017)، بر اساس فرمول زیر بیان می‌شود:

$$AIC = n \ln\left(\frac{SSE}{n}\right) + 2p$$

در این رابطه، SSE، مجموع مربعات خطا، n، تعداد مشاهدات و p، تعداد فراسنجه‌های مدل است. جذر میانگین مربعات خطا (RMSE): این معیار از تقسیم مجموع مربعات خطا بر درجه آزادی محاسبه می‌شود (Ghavi Hossein-Zade, 2015):

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{(n-p)}}$$

در این رابطه، SSE، مجموع مربعات خطا، n، تعداد کل مشاهدات و p، تعداد فراسنجه‌های مدل است. یک مدل با کم‌ترین میزان RMSE، به‌عنوان بهترین مدل، شناخته می‌شود.

ضریب تعیین ( $R^2$ ): در واقع نشان‌دهنده سهم عوامل قابل کنترل در توزیع و پراکنش بین مشاهدات است و برابر با نسبتی از پراکنش صفت است که به‌وسیله عوامل قابل کنترل ایجاد شده است (Da Silva et al., 2013). ضریب تعیین بالا، نشان‌دهنده این است که همواره بخش عمده‌ای از عوامل موثر بر صفت موردنظر به‌صورت قابل کنترل در آمده است. مقدار ضریب تعیین از صفر تا یک متغیر است

جدول ۲- مدل‌های غیرخطی تولید شیر گاوهای شیری

Table 1. Nonlinear models of milk production

Function	References	Formula
Wood	Wood (1967)	$y = at^b \exp(-ct)$
Wilmink	Wilmink (1987)	$y = a + bt + ce^{-0.05t}$
Dhanao	Papajcsik & Bodero (1988)	$y = at^b e^{-ct}$
Cappio-Borlino	Cappio-Borlino et al. (1995)	$y = at^b e^{-ct}$
Cobby & Le Du	Cobby & Le Du (1978)	$y = a - bt - ae^{-ct}$

و دلیل اصلی آن به افزایش سن حیوان مربوط می‌شود. همچنین، دلیل اصلی کم بودن تولید گاوها در نخستین دوره شیردهی، مصرف انرژی برای رشد بدن است. فراسنجه  $c$ ، (شیب خط کاهشی تولید شیر بعد از دوره اوج تولید) نشان‌دهنده تداوم شیردهی است. هر اندازه مقدار شیب خط، کم‌تر باشد، نشان‌دهنده تداوم بیشتر در گاوهای شیری است. اگر بتوان در این دوره، تداوم شیردهی را با انتخاب ژنتیکی افزایش داد، سودمندی یک واحد پرورشی، افزایش می‌یابد، زیرا هزینه‌های تولید شیر به تداوم تولید شیردهی بعد از اوج تولید بستگی دارد و هر اندازه تداوم شیردهی، افزایش پیدا کند، سودمندی آن نیز افزایش خواهد یافت (Gengler et al., 2001). با افزایش تداوم شیردهی در گله‌های شیری، بروز اختلالات متابولیکی و تولیدمثلی با کاهش سطح تنش، کنترل می‌شود.

با افزایش تداوم شیردهی در گاوهای شیری، جیره غذایی مصرفی در بهاربندها ثابت باقی می‌ماند و گاوها در بین بهاربندها، کم‌تر جابجا می‌شوند و همین امر می‌تواند باعث کاهش هزینه‌های تولیدی شود. برای رسیدن به پیشرفت ژنتیکی در صفت تداوم شیردهی، برآورد وراثت‌پذیری این صفت، ضروری است. مطالعات مختلفی، وراثت‌پذیری تداوم شیردهی را بدست آورده‌اند که به عنوان نمونه، این مقدار برای گاوهای هلشتاین ایران از ۰/۰۹ تا ۰/۲۲ برآورد شده شد (Khorshidie et al., 2012). با توجه به مقادیر وراثت-پذیری تداوم شیردهی که در محدوده پائینی قرار دارد؛ می‌توان بیان کرد که انتخاب مستقیم برای افزایش تداوم شیردهی در گاوهای شیری، بسیار زمان‌بر است و بایستی برای افزایش تداوم شیردهی، شرایط محیطی و مدیریتی را بهبود بخشید.

با استفاده از فراسنجه‌های موجود در جدول ۳، می‌توان زمان رسیدن به اوج تولید و مقدار تولید در زمان اوج شیردهی را محاسبه کرد (Lotfi et al., 2014). انتخاب نوع

از تابع وود، می‌تواند سطح زیر منحنی شیردهی را به نحو مطلوبی توصیف کند و از این رو بهتر است برای توصیف منحنی‌های شیردهی، از تابع وود استفاده شود. در گزارش دیگری، پس از مقایسه هفت مدل ریاضی برای برازش تولید شیر گاوهای هلشتاین، مدل وود به‌عنوان بهترین مدل ریاضی نشان داده شد (Atashi et al., 2003) و این در حالی است که مطالعه دیگری، مدل روک را به‌عنوان بهترین تابع برای برازش منحنی شیردهی در گاوهای هلشتاین ایران معرفی کرد (Arianfar et al., 2022). همچنین، این محققین، به این نتیجه رسیدند که استفاده از تابع دایجکسترا از نظر زمان برازش نسبت به مدل‌های دیگر، نیاز به زمان بیش‌تری دارد و برای برازش، تابع مناسبی نیست. در مطالعات دیگر، مدل‌های مختلفی به‌عنوان بهترین مدل آماری، گزارش شده است. تنوع ژنتیکی درون و بین نژادها، روش و معیارهای انتخاب، سیستم مدیریت و شرایط محیطی در تفاوت الگوهای آماری، تاثیر معنی‌داری دارد (Gholizadeh & Tajikkhari., 2024). در این مطالعه با استفاده از رویه حداقل مربعات غیرخطی، مقادیر شیر تخمینی که با مدل وود صورت گرفته است، نشان داده شده است. گاوهای اول تا سوم مربوط به دوره شیردهی اول، گاوهای چهارم و پنجم مربوط به گاوهای دوره شیردهی دوم، و گاوهای ششم، هفتم و هشتم نیز مربوط به دوره شیردهی سوم هستند. در این مطالعه، نشان داده شد که مقادیر  $a$  در بین دوره‌های شیردهی متغیر است و با افزایش دوره شیردهی، مقدار  $a$  افزایش می‌یابد. مطابق با نتایج این مطالعه، در گزارشی نشان داده شد که مقدار  $a$  با افزایش دوره زایش در گاوهای شیری افزایش می‌یابد و مقدار  $a$  در دوره زایش سوم، نسبت به زایش‌های اول و دوم، بیش‌تر است (Arianfar et al., 2022). بنابراین، میزان تولید اولیه در گاوهای شکم زایش بالاتر، نسبت به زایش‌های اول و دوم، بیش‌تر است. به‌عبارتی دیگر می‌توان بیان کرد که تولید شیر در دوره شیردهی سوم به حداکثر خود می‌رسد

جدول ۳- مقادیر تخمینی فراسنجه‌های مدل‌های غیرخطی مربوط به دوره‌های اول تا سوم تولید شیر، برازش شده در هشت گاو هلشتاین

Table 3. Estimated values of the parameters of nonlinear models related to the first to third periods of milk production, fitted to eight Holstein cows

Model	Parameter/cow	First lactation			Second lactation		Third lactation		
		1	2	3	4	5	6	7	8
Wood	a	57.87	38.71	23.36	37.80	41.79	52.53	52.23	52.87
	b	0.40	0.25	0.57	0.55	0.56	0.45	0.40	0.57
	c	0.13	0.03	0.06	0.12	0.13	0.16	0.11	0.17
	R <sup>2</sup>	78.00	78.00	97.00	73.00	81.00	86.00	71.00	76.00
	RMSE	39.01	11.40	10.33	16.37	14.64	26.00	21.25	30.60
	AIC	35.32	29.27	25.78	36.09	34.76	33.94	36.15	36.65
Wilmink	a	924.32	316.98	506.65	660.78	673.00	1116.50	508.01	821.60
	b	-36.08	-9.47	-16.46	-23.49	-24.30	-44.95	-18.48	-31.70
	c	-879.30	-282.38	-490.90	-631.90	-631.9	-1079.01	-461.70	-779.10
	R <sup>2</sup>	70.00	66.00	86.00	87.00	87.00	85.00	58.00	68.00
	RMSE	15.44	12.02	12.50	5.60	9.64	10.94	29.65	27.28
	AIC	32.23	29.85	27.69	26.70	29.74	21.38	39.78	39.06
Dhanaoa	a	57.86	38.70	23.35	37.79	41.79	52.53	52.23	52.87
	b	3.06	8.44	8.77	4.71	4.32	2.84	3.57	3.29
	c	0.13	0.03	0.06	0.12	0.13	0.16	0.11	0.17
	R <sup>2</sup>	58.00	68.00	89.00	72.00	80.00	65.00	70.00	75.00
	RMSE	39.02	11.40	10.33	16.30	14.64	26.16	21.31	30.63
	AIC	35.33	29.27	25.79	36.10	34.75	21.40	36.22	37.52
Cappio- Borlino	a	46.39	37.59	21.86	31.94	33.51	41.12	42.71	39.19
	b	0.71	0.23	0.53	0.63	0.75	0.72	0.97	1.46
	c	0.38	0.05	0.05	0.16	0.20	0.41	0.37	0.43
	R <sup>2</sup>	31.00	67.00	89.00	57.00	62.00	28.00	72.00	71.00
	RMSE	64.08	11.46	10.38	25.69	27.58	53.60	19.63	35.76
	AIC	29.79	29.32	25.83	41.50	42.35	34.09	35.24	38.20
Cobby & Le Du	a	72.08	46.64	39.20	65.70	70.19	65.96	68.58	74.87
	b	3.18	-0.49	-0.70	2.43	2.89	3.53	2.51	3.95
	c	1.35	1.49	0.73	0.70	0.75	1.29	1.20	1.02
	R <sup>2</sup>	52.00	67.00	90.00	63.00	74.00	56.00	77.00	79.00
	RMSE	45.05	11.65	9.42	21.93	19.10	32.60	16.65	18.34
	AIC	36.62	29.50	24.86	39.60	37.92	30.11	33.43	35.09

RMSE: Root mean square error; AIC: Akaike information criterion

وود و تعداد کم‌تر فراسنجه‌ها (Cannas & Pulina, 2008)، این تابع برای بررسی خصوصیات منحنی شیردهی، مانند مقدار تولید اولیه، مقدار تولید شیر در زمان اوج و زمان رسیدن به اوج تولید شیر، مورد استفاده قرار گرفت. بررسی‌های دقیق‌تر فراسنجه‌های مدل غیرخطی وود از روش DOLS انجام شد تا قدرت و توانایی روش DOLS نسبت به روش‌های معمول، در کالیبره‌سازی زمان و مدل نشان داده شود و این دو روش مورد قیاس قرار گرفتند. روش DOLS، بهترین تابع مقعری که بر اساس قانون بازدهی نزولی باشد را ایجاد نموده و توانایی کالیبره‌سازی زمان را دارد (Tajik khari et al., 2024). روش DOLS با در نظر گرفتن پویایی داده‌ها و تصحیح خودهمبستگی و هم‌جمعی در سری‌های زمانی، می‌تواند فراسنجه‌ها را با دقت بیشتری

مدل ریاضی برای بررسی‌های مسیر اصلاح نژاد، به عواملی مانند بیماری، نوع اطلاعات موجود، ژنتیک دام، سن نخستین زایش، فصل شیردهی و آبستنی بستگی دارد (Grossman et al., 1986). بنابراین، این عوامل باعث می‌شود تا منحنی‌ها تغییر حالت داده و در بیشتر موارد، از حالت هنجار به ناهنجار تبدیل شود (Lotfi et al., 2014). جدول ۴، برآورد فراسنجه‌های منحنی شیردهی وود را با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی پویا نشان می‌دهد. این نتایج نشان داد که با استفاده از روش DOLS، R<sup>2</sup> افزایش و معیارهای میانگین حداقل مربعات و AIC کاهش یافته است. همان‌طور که در جدول ۳ نشان داده شد، تابع وود (گامای ناقص) به دلیل میانگین مربعات خطای کم‌تر، برازش بهتری از سایر مدل‌ها داشت و به علت سادگی تابع

غیرخطی ارائه دهد (Saikkonen, 1991). به عنوان مثال، در تحقیقات حوزه تولید شیر و مدل‌های منحنی شیردهی، استفاده از DOLS باعث شده است تا تخمین فراسنجه‌ها نه تنها با سرعت بیشتر و بدون نیاز به مقدار اولیه مشخص صورت گیرد، بلکه نتایج مدل‌ها با داده‌های واقعی مزرعه انطباق بهتری داشته باشند (Tawhidi Mehr, 2021; Tajik khari et al., 2024). به این ترتیب، DOLS ضمن کاهش خطاهای برآوردی، امکان استخراج منحنی‌های شیردهی خوش‌فرم و قابل مشتق‌گیری نسبت به زمان را فراهم می‌کند که در تحلیل‌های دقیق‌تر تولید شیر بسیار کارآمد است.

در شکل ۱، منحنی شیردهی وود مربوط به دو روش LS و DOLS نشان داده شده است. در این شکل مشخص است که مقدار تولید در زمان اوج تولید و هم چنین، زمان رسیدن به اوج تولید در روش DOLS و مقدار واقعی بر همدیگر منطبق هستند. به عبارتی دیگر، روش DOLS توانسته به خوبی، از نقطه اوج تولید و مقدار اولیه عبور کند و مدل وود را نسبت به زمان کالیبره سازد. در واقع، بر اساس داده‌های شکل ۱، مقادیر پیش‌بینی شده با روش DOLS با داده‌های واقعی ثبت‌شده در مزرعه مقایسه شده‌اند. مزیت اصلی روش DOLS، بهینه‌سازی هم‌زمان فراسنجه‌ها بدون نیاز به تعیین مقادیر اولیه و امکان همگرایی سریع‌تر به تخمین‌های دقیق‌تر است. در این مطالعه، معیارهای ارزیابی مدل از جمله میانگین مربعات خطا و ضریب تعیین تصحیح شده نشان داده‌اند که DOLS عملکرد برتری در تخمین مقادیر تولید شیر در زمان اوج و زمان رسیدن به اوج دارد. بنابراین، در صورت بروز تخمین بیش از حد واقعی، این اختلاف در معیارهای آماری مدل منعکس شده و منجر به کاهش اعتبار مدل خواهد شد. به همین دلیل، نتایج ارائه شده در شکل ۱، نمایانگر تخمین‌های بهینه و قابل اطمینان هستند که نشان‌دهنده تطابق بالای مدل با داده‌های واقعی است. در شکل ۱، به خوبی نشان داده شده است که خط رگرسیونی DOLS (خط بالا) از دو نقطه مهم مقدار اولیه تولید و مقدار تولید در زمان اوج عبور کرده است. از طرفی دیگر، زمان رسیدن به اوج تولید در منحنی بالایی (DOLS) و زمان رسیدن به اوج تولید در اطلاعات واقعی، منطبق بر یکدیگر است. آنچه که از شکل ۱ و جداول ۳ و ۴ مشخص است، قدرت برازش بالای روش DOLS در تخمین فراسنجه‌های منحنی شیردهی است. ممکن است گاهی در

نسبت به روش‌های حداقل مربعات غیرخطی معمول برآورد کند. این روش باعث می‌شود ضرایب مدل در محدوده اطلاعات واقعی مشاهده شده قرار گیرند و برآورد مقادیر مهمی مانند مقدار اولیه تولید شیر، زمان اوج تولید و تولید شیر در نقطه اوج، به واقعیات مزرعه نزدیک‌تر باشد. از این رو، روش DOLS در مقایسه با روش حداقل مربعات غیرخطی سنتی، دقت بیشتری در برآورد و پایداری ضرایب منحنی شیردهی دارد (Stock & Watson, 1993).

با توجه به نتایج جدول ۴، با استفاده از روش DOLS در برآورد فراسنجه‌های مدل ریاضی وود، مقدار  $R^2$  تمام گاوهای شیری افزایش و مقدار میانگین مربعات خطا و معیار آکایک آن‌ها کاهش چشمگیری پیدا کرده است. استفاده از این روش توانسته به خوبی فراسنجه‌های مدل وود را تخمین بزند، به گونه‌ای که بهترین خط رگرسیونی نیز ترسیم شود. در روش حداقل مربعات غیرخطی، برآورد فراسنجه‌ها از مسیر الگوریتم‌های تکراری انجام می‌شود. در هر تکرار، مقادیر فراسنجه‌ها به گونه‌ای به روز می‌شوند که واریانس باقی‌مانده بین مقادیر پیش‌بینی شده و داده‌های واقعی کاهش یابد. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که تغییر در خطا ناچیز شود یا به آستانه همگرایی برسد. یکی از چالش‌های اصلی در این روش، لزوم وارد کردن مقادیر اولیه فراسنجه‌ها به صورت دستی است. انتخاب نامناسب این مقادیر اولیه ممکن است باعث کندی روند همگرایی، توقف الگوریتم در حداقل‌های موضعی یا حتی عدم همگرایی شود. به همین دلیل، مقادیر اولیه اهمیت زیادی دارند و تضمینی برای کاهش یکنواخت واریانس خطا در همه موارد وجود ندارد (Bates & Watts, 1988). چون مدل‌های غیرخطی، فراسنجه‌های پیچیده و تعامل‌پذیری دارند و الگوریتم‌های بهینه‌سازی نیاز به نقطه شروع (مقدار اولیه) دارند تا روند تکراری به سمت تخمین بهینه هدایت شود. بدون مقدار اولیه مناسب، الگوریتم نمی‌تواند به درستی فراسنجه‌ها را تخمین بزند یا ممکن است به پاسخ نادرست برسد. در روش DOLS، برخلاف روش‌های سنتی که نیازمند تعیین مقادیر اولیه دستی و پیچیده برای تخمین فراسنجه‌ها هستند، از الگوریتم‌هایی بهره گرفته می‌شود که به طور خودکار و بر اساس داده‌های موجود، بهترین برازش را انجام می‌دهند (Saikkonen, 1991). این روش با استفاده از داده‌های زمان‌بندی شده و اصلاح خطاهای خودهمبسته، توانسته است دقت بالاتری در برآورد فراسنجه‌های مدل‌های

برای پیش‌بینی مدل شیردهی، نمی‌تواند مقدار بازدهی نهایی زمان (زمان رسیدن به اوج) را در محدوده اطلاعات واقعی نشان دهد و بنابراین، این روش، نمی‌تواند مدل گامای ناقص (وود) را کالیبره نماید. در این صورت، روش حداقل مربعات غیرخطی توانایی ارائه توصیه‌های اقتصادی و اصلاح نژادی را ندارد. همچنین، در این مطالعه نشان داده شد که تابع وود، مقدار تولید را در زمان اوج شیردهی، کمتر از مقدار واقعی برآورد نموده که این نتیجه با نتایج گزارش دیگر (Lotfi et al., 2014) هم‌خوانی دارد. در یک بررسی روی تخمین فراسنجه‌های منحنی تولید شیر گاوهای هلشتاین، نشان داده شد که مدل غیرخطی وود، نسبت به سایر مدل‌ها، برازش بهتری دارد، اما این مدل، مقدار تولید در زمان اوج شیردهی را کمتر از مقدار واقعی تخمین می‌زند (Masoudi & Rashedi Dehsahraei, 2018).

تخمین فراسنجه‌های منحنی تولید شیر، بعضی از مدل‌ها از  $R^2$  بالایی برخوردار باشند، اما نتوانند مدل را به‌درستی کالیبره نمایند. بنابراین، برای بررسی کارایی یک مدل معمولی پویا یعنی DOLS، علاوه بر آنکه مدل بایستی از  $R^2$  بالایی برخوردار باشد، باید بتواند کالیبره نیز باشد، به این معنا که زمان رسیدن به اوج تولید را در محدوده اطلاعات مزرعه نشان دهد. در صورتی که یک مدل غیرخطی، از  $R^2$  بالایی برخوردار باشد، اما نتواند زمان را کالیبره کند، برای توصیه‌های اقتصادی و اصلاح نژادی، کارایی نخواهد داشت.

همان‌طور که مشخص است، روش حداقل مربعات معمولی پویا یا DOLS توانسته است زمان رسیدن به اوج تولید و مقدار تولید شیر در زمان اوج را به‌درستی تخمین بزند. نتایج این مطالعه نشان داد که روش‌های رایج غیرخطی

جدول ۴- برآورد فراسنجه‌های منحنی شیردهی وود با استفاده از روش DOLS برازش شده برای هشت گاو هلشتاین

Table 4. Estimation of Wood's lactation curve parameters using the DOLS method fitted for eight Holstein cows

Model	Parameters	Cow number							
		First lactation			Second lactation		Third lactation		
		1	2	3	4	5	6	7	8
Wood (DOLS)	a	13.50182	10.02337	2.03	13.82	5.55	29.22	0.176	0.0373
	b	0.4432	0.3944	0.6225886	0.2905	0.6123474	0/148	1.894	2.4
	c	0.00492	0.00164	0.002565143	0.00121	0.0051	0.0009	0.032	0.04
	$R^2$	98	99	99	98	98	99	88	92
	RMSE	0.15924	0.022	0.0117	0.1235	0.009	0.066	8.7	10.00979
	AIC	-13.87	-39.148	6.08248	-20.49	-53.88	-19.55	26.3	76.069

RMSE: Root mean square error; AIC: Akaike information criterion

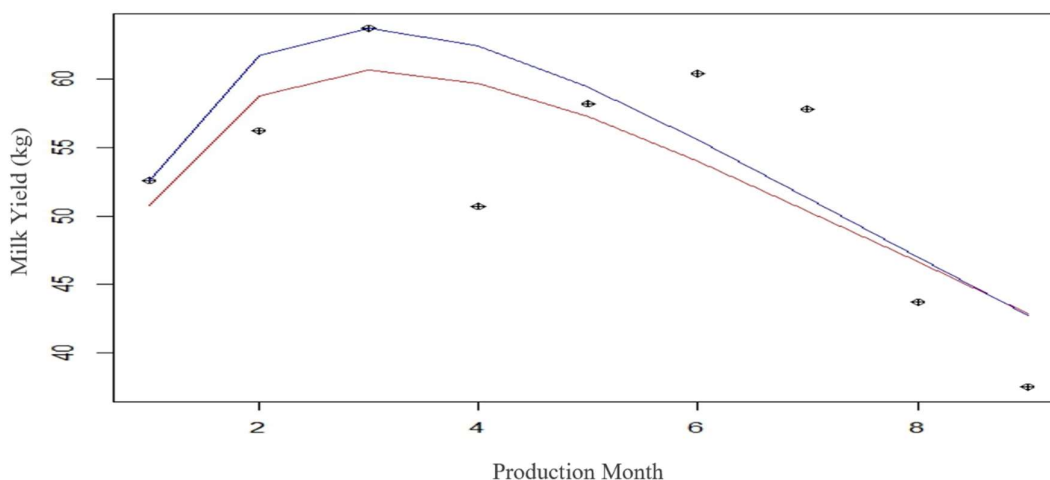


Fig. 1. Lactation curve of first parity dairy cows estimated using the nonlinear least squares (LS) method (lower curve) and the DOLS method (upper curve)

شکل ۱- منحنی شیردهی گاو شیری شکم اول، با استفاده از روش LS (خط پائین) و روش DOLS (خط بالا)

پیش‌بینی کند و در غیر این صورت، مدل موردنظر، فاقد اعتبار لازم برای ارائه توصیه‌های اقتصادی و اصلاح نژادی است. در جدول ۵، اطلاعات واقعی مزرعه و تخمین روش-های LS و DOLS نشان داده شده است. در این جدول کاملاً مشخص است که روش DOLS توانسته مقادیر تولید اولیه، مقدار تولید شیر در زمان اوج تولید و همچنین، زمان رسیدن به اوج تولید را به‌درستی کالیبره نموده و نشان دهد و از این رو، این روش آماری، توانسته تخمین‌ها را با استفاده از اطلاعات واقعی و موجود در مزرعه، از مرز بی‌نهایت به مقدار واقعی، نزدیک کند.

جدول ۶، نشان‌دهنده مقادیر خطای استاندارد (SE) بوده که تفاوت میان مقادیر مشاهده شده و واقعی را بین دو روش LS و DOLS نمایش می‌دهد. در این جدول، مشخص است که روش DOLS توانسته به‌درستی مقادیر اولیه و اوج تولید را تخمین بزند. نتایج جدول ۵ و ۶، به‌خوبی قدرت کالیبره‌سازی روش DOLS را نسبت به زمان و مقدار تولید شیر در زمان اوج تولید را نشان می‌دهد. مطالعه Arianfar et al. (2022) نشان داد که تابع وود، زمان رسیدن به اوج تولید را نسبت به مقدار واقعی آن، بالاتر تخمین می‌زند و همچنین، این تابع، مقدار تولید در اوج را کمتر از مقدار واقعی و حقیقی نشان می‌دهد. بنابراین، باید روش DOLS را جایگزین روش LS کرد. توجه به این نکته مهم است که ساختار داده‌ها و اطلاعات تولید شیر، باید دقیق و صحیح باشد و در صورتی که داده‌ها از ساختار خوبی برخوردار نباشند، خطا در تخمین‌ها و برآوردهای روش حداقل مربعات خطی، افزایش خواهد یافت.

در تایید این نتیجه، نقطه ضعف اساسی مدل وود، برآورد بیش از حد تولید در مرحله افزایشی منحنی و برآورد کم‌تر از حد در محدوده اوج تولید و پس از آن است (Macciotta et al., 2005) که همین موارد منجر به ایجاد اشکال نامتعارف منحنی شیردهی خواهد شد. مطالعات دیگری نیز فراسنجه‌های مدل ریاضی غیرخطی وود را با روش حداقل مربعات خطی به‌دست آورده‌اند (Fathi Nasri et al., 2008) و احتمالاً به‌همین خاطر، تولید شیر در زمان اوج تولید، کم‌تر از مقدار واقعی تخمین زده می‌شود. هم‌چنین این مطالعه نشان داد که توابعی مانند وود و دایجکسترا، توانایی برازش منحنی شیر را در ۳۰ روز ابتدای دوره شیردهی ندارند. نتایج نشان می‌دهد که مدل‌های ریاضی توصیف‌کننده منحنی شیر، ذاتاً غیرخطی هستند و استفاده از روش‌های خطی قطعاً نمی‌تواند فراسنجه‌های مدل غیرخطی وود و مقدار تولید شیر در زمان اوج را به‌درستی پیش‌بینی نماید. در همین مطالعه، نشان داده شد که روش DOLS توانایی تخمین دقیق مقدار تولید شیر را در زمان اوج شیردهی دارد. این روش توانسته به خوبی، مدل گامای ناقص را کالیبره نماید و زمان رسیدن به اوج تولید و مقدار تولید شیر در اوج تولید را به‌درستی تخمین بزند. مفهوم کالیبره‌سازی، این طور بیان می‌شود که اگر فراسنجه‌های مدل غیرخطی وود را با استفاده از روش DOLS تخمین بزنیم و سپس، این مدل را بر اساس زمان، حداکثرسازی کنیم. زمان به‌دست آمده، مقدار بازدهی نهایی را نشان می‌دهد که باید در محدوده اطلاعات روزآزمون قرار داشته باشد و در غیر این صورت، قابل قبول نیست. یک روش استاندارد، باید بتواند مقدار زمان تخمینی را در حوالی زمان واقعی

جدول ۵- مقایسه روش‌های آماری LS و DOLS مدل وود در تخمین مقدار اولیه تولید شیر، زمان رسیدن به اوج تولید و

تولید شیر در زمان اوج شیردهی

Table 5. Comparison of LS and DOLS Wood function statistical methods in estimating the initial amount of milk production, the time to reach peak production, and milk production at the peak of lactation

Actual information	Early production of milk (kg)		Time to peak milk yield (Day)			Amount of milk production at the peak of lactation (kg)		
	LS	DOLS	Actual information	LS	DOLS	Actual information	LS	DOLS
52.6	59.164	52.5999	90	91.67	89.9991	63.7	60.64	63.6991
36.5	37.25469	36.49999	241	253.17	240.00066	58.7	51.59	58.71
19.8	23.095	15.61	241	263.09	242.711	47.8	45.29	23.32
35.8	7.31232	35.791	240	121.22	239.96	50.8	42.19	50.79
38.2	5.673	38.19	120	129.65	120.0009	56.4	54.281	56.2999
47	2.0568	47.0004	151	85.19	150.004	53	53.57	53.0002
43	7.242	43.0005	61	107.181	60.00001	62	58.2	62.00009
40.5	2.0782	40.49	60	98.661	59.99999	64.5	58.8848	64.49991

## نتیجه‌گیری کلی

آگاهی از مشخصات منحنی شیردهی (کل تولید در دوره شیردهی، مقدار تولید روزانه در زمان اوج تولید، تداوم شیردهی و زمان رسیدن به اوج شیردهی) لازمه تصمیم‌گیری‌های مدیریتی است، لذا مطالعه و برازش منحنی شیر هر گاو به صورت مجزا و انفرادی، از اهمیت بالایی برخوردار است. بنابراین، انتخاب بهترین مدل، علاوه بر اینکه به ساختار داده‌ها و اطلاعات مربوط است و باید روش‌های رکوردگیری را به درستی انجام داد، به روش آماری صحیحی برای برآورد فراسنجه‌های مدل نیاز است. نتایج این مطالعه به روشنی نشان می‌دهد که روش آماری DOLS می‌تواند دقیق‌ترین تخمین را از فراسنجه‌های مدل غیرخطی وود به دست آورد که نه تنها بهترین خط رگرسیونی از میان داده‌های تولید شیر رسم می‌شود، بلکه توانایی کالیبره‌سازی زمان را نیز دارد. چنانچه، مقادیر تولید شیر در زمان اوج شیردهی، شیب خط افزایشی و کاهشی منحنی شیردهی به درستی و با دقت بالا، تخمین زده نشود، تصمیم‌گیری برای حذف گاوهای شیری با خطا روبرو خواهد شد. از این رو، استفاده از این روش برای برآورد فراسنجه‌های مدل‌های

غیرخطی تولید شیر توصیه می‌شود و می‌توان این روش را در برنامه‌های اصلاح نژادی استفاده نمود تا بتوان بهترین توصیه‌های اقتصادی و اصلاح نژادی را ارائه داد. برای تأیید یافته‌های این تحقیق، توصیه می‌کنیم: (۱) با توجه به ماهیت غیر ایستا بودن سری‌های زمانی، فرض هم‌انباشتگی از راه آزمون‌های استاندارد تأیید شود و (۲) عملکرد DOLS با جایگزین‌های غیرخطی مانند NLS با خطاهای خودهمبستگی قوی مقایسه شود. چنین تحلیل‌هایی به خوانندگان کمک می‌کند تا مزایای نسبی رویکرد پیشنهادی را بهتر ارزیابی کنند. همچنین، با توجه به حجم نمونه نسبتاً کوچک مورد استفاده در ارزیابی کارایی DOLS، انجام مطالعات گسترده‌تر با نمونه‌های بزرگ‌تر و بررسی‌های تکمیلی برای تأیید نهایی یافته‌ها توصیه می‌شود.

## تشکر و قدردانی

این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری در قرارداد شماره ۰۲-۱۴۰۴-۰۲ انجام شد که بدین وسیله سپاسگزاری می‌شود.

جدول ۶- مقایسه برآورد خطای استاندارد (SE) برای تولید اولیه و مقدار تولید در اوج شیردهی با دو روش حداقل مربعات غیر خطی (LS) و حداقل مربعات معمولی پویا (DOLS)

Table 6. Comparison of standard error (SE) estimates for initial production and peak lactation yield using nonlinear least squares (LS) and dynamic ordinary least squares (DOLS) methods

Amount of milk production at the peak of lactation (kg)		Early production of milk (kg)	
LS	DOLS	LS	DOLS
9.3636	0.000001	34804855.39	0.00000007494
50.5521	0	0.569556996	0.000000000003
6.3001	212.2849	10.85557525	17.64
74.1321	0.0001	81.547556	0.0000346
4.490161	0.01002	1058.001124	0.000000000064
0.3249	0.00000004	2019.888648	0.0000000016
14.44	0.000000081	1278.621568	0.0000000032
31.53	0.00000001	1476.227651	0.0000000006

## فهرست منابع

- Arianfar, M., Rokouei, M., Dashab, G. R., & Faraji-Arough, H. (2022). Investigating the relationship between lactation curve parameters and some economic traits of Iranian Holstein cows. *Animal Production Research*, 11(1), 1-13. doi: 10.22124/ar.2022.18691.1590 [In Persian]
- Atashi, H. (2003). *Determining the best equation for describing the lactation curve in Iranian Holstein cows*. Doctoral dissertation, Msc dissertation. Faculty of Agriculture, University of Tehran, Karaj, Iran. [In Persian]
- Cannas, A., & Pulina, G. (Eds.). (2008). *Dairy goats feeding and nutrition*. CAB International.

- Cappio-Borlino, A., Pulina, G., & Rossi, G. (1995). A non-linear modification of Wood's equation fitted to lactation curves of Sardinian dairy ewes. *Small Ruminant Research*, 18(1), 75-79. doi:10.1016/0921-4488(95)00713
- Cobby, J. M., & Le Du, Y. L. P. (1978). On fitting curves to lactation data. *Animal Science*, 26(2), 127-133.
- Elahi Torshizi, M., Aslamenejad, A. A., Nassiri, M. R., & Farhangfar, H. (2011). Comparison and evaluation of mathematical lactation curve functions of Iranian primiparous Holsteins. *South African Journal of Animal Science*, 41(2), 104-115. doi: 10.4314/sajas.v41i2.71013
- Farhanfar, H. (2015). On the lactation curve and its application in dairy cattle breeding. In: 1<sup>st</sup> National Congress on Advanced Research in Animal Science, Birjand University, Iran. [In Persian]
- Farhangfar, S. H., Rashidi Toghroljerdi, M. S., Montazar Torbati, M. B. and Sayyadnezhad, M. B. (2023). A study on the lactation curve characteristics of grade and Iranian purebred Holstein cows with the use of raw, fat-corrected, and energy-corrected milk test day records. *Animal Production Research*, 12(2), 71-84. doi: 10.22124/ar.2023.22771.1718 [In Persian]
- Fathi Nasri, M. H., France, J., Odongo, N. E., Lopez, S., Bannink, A., & Kebreab, E. (2008). Modelling the lactation curve of dairy cows using the differentials of growth functions. *Journal of Agriculture Science*, 146, 633-641.
- Fernández, C., Sánchez, A., & Garcés, C. (2002). Modeling the lactation curve for test-day milk yield in Murciano-Granadina goats. *Small Ruminant Research*, 46(1), 29-41. doi: 10.1016/S0921-4488(02)00179-7
- Gengler, N., Tijani, A., Wiggans, G. R., & Philpot, J. C. (2001). Estimation of (co) variance functions for test-day yields during first and second lactations in the United States. *Journal of Dairy Science*, 84(2), 542-e1. doi: 10.3168/jds.S0022-0302(01)74505-5
- Ghavi Hossein-Zadeh, N. (2014). Comparison of non-linear models to describe the lactation curves of milk yield and composition in Iranian Holsteins. *The Journal of Agricultural Science*, 152(2), 309-324. doi: 10.1017/S0021859613000415
- Ghavi Hossein-Zadeh, N. (2015). Modeling the growth curve of Iranian Shall sheep using non-linear growth models. *Small Ruminant Research*, 130, 60-66. doi: 10.1016/j.smallrumres.2015.07.014
- Ghavi Hossein-Zadeh, N. (2016). Comparison of non-linear models to describe the lactation curves for milk yield and composition in buffaloes (*Bubalus bubalis*). *Animal*, 10(2), 248-261. doi: 10.1017/S1751731115001846
- Ghavi Hossein-Zadeh, N. (2017). Application of growth models to describe the lactation curves for test-day milk production in Holstein cows. *Journal of Applied Animal Research*, 45(1), 145-151. doi: 10.1080/09712119.2015.1124336
- Gholizadeh, M., & Tajikkhari, M. (2024). Growth curve modeling in Holstein dairy calves using non-linear functions. *Research On Animal Production*, 15(3), 1-9. doi: 10.61186/rap.15.3.1 [In Persian]
- Grossman, M., Kuck, A. L., & Norton, H. W. (1986). Lactation curves of purebred and crossbred dairy cattle. *Journal of Dairy Science*, 69(1), 195-203. doi: 10.3168/jds.S0022-0302(86)80386-1
- Grossman, M., & Koops, W. J. (1988). Multiphasic analysis of lactation curves in dairy cattle. *Journal of Dairy Science*, 71(6), 1598-1608. doi: 10.3168/jds.S0022-0302(88)79723-4
- Hasanpur, K., Aslaminejad, A. A., & Moradi Shahrababak, M. (2012). Study of milk production and milk fat percentage curves in different lactation periods in Holstein cows of Iran. *Journal of Animal Production*, 14(1), 19-31. doi: 10.22059/jap.2012.28890 [In Persian]
- Khorshidie, R., Shadparvar, A. A., Ghavi Hossein-Zadeh, N., & Joezy Shakalgarabi, S. (2012). Genetic trends for 305-day milk yield and persistency in Iranian Holsteins. *Livestock Science*, 144, 211-217. doi: 10.1016/j.livsci.2011.11.016
- Lotfi, S., Lotfi, R., Vahidian Kamyad, A., & Farhangfar, H. (2014). Modeling the lactation curve of Holstein dairy cows using the Sine function and comparing it with Dijkstra and Wood's functions in a herd of Holstein dairy cow. *Iranian Journal of Animal Science*, 45(1), 59-68. doi: 10.22059/ijas.2014.51750 [In Persian]
- Mahaboob, B., Venkateswarlu, B., Narayana, C., Sankar, J. R., & Balasiddamuni, P. (2018). A treatise on ordinary least squares estimation of parameters of linear model. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(4.10), 518-522. doi: 10.14419/ijet.v7i4.10.21216
- Macciotta, N. P. P., Vicario, D., & Cappio-Borlino, A. (2005). Detection of different shapes of lactation curve for milk yield in dairy cattle by empirical mathematical models. *Journal of Dairy Science*, 88(3), 1178-1191. doi: 10.3168/jds.S0022-0302(05)72784-3
- Masoudi, A., & Rashedi Dehsahraei, A. (2019). Comparison of lactation descriptive models and the study of the effect of some non-genetic factors on lactation parameters in Buffalo. *Animal Sciences Journal*, 31(121), 131-140. doi: 10.22092/asj.2018.116366.1577 [In Persian]
- Papajcsik, I. A., & Boderó, J. (1988). Modelling lactation curves of Friesian cows in a subtropical climate. *Animal Science*, 47(2), 201-207. doi: 10.1017/S0003356100003275

- Pinheiro, J., Bates, D., DebRoy, S., Sarkar, D., Heisterkamp, S., & Van Willigen, B. (2016). R Core Team. nlme: linear and nonlinear mixed effects models. R package version 3.1-128. Available at <http://CRAN.Rproject.org/package=nlme/> (accessed 15 May 2021).
- Saikkonen, P. (1991). Asymptotically efficient estimation of cointegration regressions. *Econometric Theory*, 7(1), 1-21.
- Shahroodi, N. , Rokouei, M. , Faraji- Arough, H. , Maghsoudi, A. and Kykha Saber, M. (2021). Comparison of some non-linear mathematical models to describe the growth curve of Sistani calves. *Journal of Animal Production*, 23(4), 491-500. doi: 10.22059/jap.2021.326557.623626 [In Persian]
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (1993). A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 783-820.
- Tajik khari, M., Salehi, A., Peykani Macciani, Gh., & Asadi Alamuti, A. (2024). Analysis of profitability opportunities derived from breeding a dairy cattle herd (Case study: An industrial dairy cattle herd unit in Tehran province. *Journal of Animal Production*, 26(1), 111-121. doi: 10.22059/jap.2024.360422.623745 [In Persian]
- Takma, Ç. İ. Ğ. D. E. M., & Akbaş, Y. A. V. U. Z. (2007). Estimates of genetic parameters for test day milk yields of a Holstein Friesian herd in Turkey with random regression models. *Archives Animal Breeding*, 50(4), 327-336.
- Tawhidi Mehr, H. (2021). Determining the optimal economic age of fattening in calf fattening units (case study: livestock breeding complex of Qom province). Master's thesis in Agricultural Economics. University of Tehran, Karaj, Iran.
- Wilmink, J. B. M. (1987). Adjustment of test-day milk, fat and protein yield for age, season and stage of lactation. *Livestock Production Science*, 16(4), 335-348. doi: 10.1016/0301-6226(87)90003-0
- Wood, P. D. P. (1967). Algebraic model of the lactation curve in cattle. *Nature*, 216(5111), 164-165.
- Zakizadeh, S. , Saghi, D. A., & Memarian, H. (2020). Mathematical description of growth curve in Kurdish sheep using artificial neural network and its comparison with non-linear models. *Animal Production Research*, 9(1), 45-59. doi: 10.22124/ar.2020.13212.1411 [In Persian]